

# $H^1$ n'a pas de base complètement inconditionnelle

1<sup>er</sup> février 2008

## Résumé

On montre que l'espace de Hardy  $H^1$  n'admet pas de décomposition inconditionnelle de rang fini de l'identité en tant qu'espace d'opérateurs. Il en résulte qu'il n'existe pas de base complètement inconditionnelle dans  $H^1$ .

**$H^1$  does not have any completely unconditional basis**

## English summary

Let  $H^1$  be the classical Hardy space of analytic functions on the unit disc. We show that this space does not admit any finite rank completely unconditional decomposition of the identity, as a consequence it fails to have a completely unconditional basis.

L'objet de cette note est de montrer que  $H^1$  n'admet pas de base complètement inconditionnelle et plus généralement pas de décomposition complètement inconditionnelle de rang fini. On dit qu'un espace de Banach  $X$  admet une décomposition inconditionnelle de rang fini s'il existe une suite d'endomorphismes de  $X$  de rang fini  $(P_n)$  tels que

$$\sup_{\epsilon_n = \pm 1} \sup_N \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n P_n \right\|_{X \rightarrow X} < \infty$$

et pour tout  $x \in X$ ,  $x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$  où la série converge inconditionnellement. Si  $X$  est un espace d'opérateurs, une telle décomposition est dite complètement inconditionnelle si en outre

$$\sup_{\epsilon_n = \pm 1} \sup_N \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n P_n \right\|_{cb(X, X)} < \infty.$$

$H^1$  désigne l'espace de Hardy du tore, il s'agit du sous-espace de  $L^1(\mathbb{T})$ , formé des fonctions intégrables à valeurs complexes sur le cercle unité du plan complexe ayant tous leurs coefficients de Fourier d'indice négatifs nuls. Cet espace de Banach admet d'autres descriptions en analyse réelle, par exemple il est constitué de l'ensemble des fonctions du type  $f + iH(f)$ , où  $f$  est une fonction réelle intégrable sur  $\mathbb{T}$  ayant une transformée de Hilbert  $H(f)$  également intégrable. L'autre caractérisation importante essentiellement due à Fefferman, établit que les parties réelles des fonctions dans  $H^1$  se décomposent en atomes (voir [2]).

Le premier résultat de théorie locale pour  $H^1$  remonte à Stein ([9]), les multiplicateurs de la Vallée-Poussin (convolution avec les noyaux  $W_n$ ,  $n \geq 0$  du même nom) forment une décomposition inconditionnelle de l'identité, c'est à dire qu'il existe  $K \geq 0$  telle que pour tout choix de signes  $\epsilon_n$  et tout  $N \geq 0$  :

$$\left\| f * \left( \sum_{n=0}^N \epsilon_n W_n \right) \right\|_{H^1} \leq K \|f\|_{H^1}$$

et  $f * (\sum_{n=0}^N W_n)$  tend vers  $f$  dans  $H^1$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. L'étape suivante était de savoir si cet espace de Banach admet une base inconditionnelle, Maurey dans [4] y a répondu par l'affirmative mais d'une façon assez indirecte. Ensuite, Wojtaszczyk ([10]), s'inspirant de travaux de Carleson, a explicité une telle base ; le système de Franklin s'avère être une base inconditionnelle de l'espace atomique  $H^1(\mathbb{R})$ . Depuis, la théorie des ondelettes a permis de mieux comprendre la situation, voir à ce sujet le livre d'Yves Meyer [5], chapitres V et VI.

L'espace  $H^1$  est muni d'une structure d'espace d'opérateurs au sens de la théorie développée par Blecher-Paulsen et Effros-Ruan (*cf* [1]), en d'autres termes  $H^1$  peut être réalisé comme un sous-espace de l'espace  $B(\mathcal{H})$  des opérateurs bornés d'un Hilbert  $\mathcal{H}$  dans lui-même (avec  $\mathcal{H} = \ell_2$  car  $H^1$  est séparable). On note  $S^1$  ( $S^1_d$ ) l'espace des opérateurs à trace de  $\ell_2$  ( $\ell_2^d$ ) muni de sa norme usuelle, et  $H^1(S^1)$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{T}$  à valeurs dans  $S^1$  ayant des coefficients de Fourier négatifs nuls, muni de la norme induite par  $L^1(S^1)$ . La question de l'existence de bases inconditionnelles admet un analogue dans cette théorie. En utilisant les résultats de [8], elle se retraduit de la manière suivante : peut-on trouver une base de  $H^1$ ,  $\{\psi_1, \dots, \psi_n, \dots\}$  et  $K \geq 0$  telles que pour tout  $N$  entier et toute famille  $\{x_i\}$  dans  $S_1$  et tout choix de signes  $\epsilon_n$  :

$$\left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n x_n \otimes \psi_n \right\|_{H^1(S^1)} \leq K \left\| \sum_{n=0}^N x_n \otimes \psi_n \right\|_{H^1(S^1)} ?$$

Pour infirmer cela, on démontre qu'il n'y a pas d'analogue du résultat de Stein.

**Théorème** *L'espace  $H^1(\mathbb{T})$  n'admet pas de décomposition complètement inconditionnelle de rang fini de l'identité.*

Cela signifie qu'on ne peut pas trouver de décomposition inconditionnelle  $(P_n)$  de rang fini de  $H^1$ , telle que la série  $\sum P_n \otimes Id_{S^1}$  soit inconditionnelle dans  $\mathcal{B}(H^1(S^1), H^1(S^1))$ .

Plus précisément on montre que si  $(P_n)$  est une telle décomposition, alors on peut construire une suite  $a_n$  bornée en valeur absolue par 1, telle que

$$\left\| \sum a_n P_n \otimes Id \right\|_{H^1(S^1_d) \rightarrow H^1(S^1_d)} \geq K \ln d.$$

On a besoin du fait élémentaire suivant :

**Lemme** *Soit  $\sum f_k$  une série inconditionnelle dans  $L_1(\mathbb{T})$ , alors les séries  $\sum \epsilon_k f_k$  sont uniformément de Cauchy en  $\epsilon_k \in [-1, 1]$ .*

*Démonstration du théorème :* On adopte la notation,  $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$ . La preuve s'inspire d'un des résultats de [6]. L'idée est la suivante : à partir d'une décomposition inconditionnelle de l'identité  $(P_n)$ , on construit des sortes de multiplicateurs qui permettent ensuite de transférer la projection triangulaire de  $S^1_d$  comme endomorphisme de  $H^1(S^1_d)$ .

Soit  $\eta > 0$  fixé, on construit par récurrence

$(\phi_n)$  une suite d'applications de rang fini de la forme  $\sum a_k P_k$  avec  $a_k \in \{0, 1\}$ ,

$(\alpha_n), (\beta_n)$  des suites croissantes d'entiers,

$(\epsilon_n)$  une suite de réels croissante majorée par  $\eta$ ,

telles que,

$$\forall i, j \leq n \begin{cases} i) j \leq i \\ ii) i < j \end{cases} \quad \begin{cases} \|\phi_n(e_{\alpha_i + \beta_j})\| \leq \epsilon_n \\ \|\phi_n(e_{\alpha_i + \beta_j}) - e_{\alpha_i + \beta_j}\| \leq \epsilon_n \end{cases}$$

On initialise, la récurrence par  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon$  un réel quelconque (petit). On choisit  $\phi_1 = 0$ , (i) et (ii) sont vérifiées.

On suppose toutes les suites construites jusqu'au rang  $n$ .

On fixe  $\delta > 0$ . D'après le lemme, on peut trouver un entier  $K$ , tel que

$$\forall i, j \leq n \quad \forall l \geq k \geq K \quad \forall a_k \in \{0, 1\}, \quad \left\| \sum_{t=k}^l a_t P_t(e_{\alpha_i + \beta_j}) \right\| \leq \delta.$$

On peut supposer que si  $\phi_n = \sum_{k=1}^A a_k P_k$ , alors  $K > A$ .

On détermine  $\beta_{n+1}$  ;

puisque les  $P_k$  sont de rang fini, on a  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_k(e_\beta) = 0$  dans  $H^1$  car  $e_\beta$  tend faiblement vers 0. On choisit  $\beta_{n+1}$  suffisamment grand pour que pour tout  $\beta \geq \beta_{n+1}$  et tout choix  $(a_k)_1^K \in \{0, 1\}^K$  (il y en a un nombre fini)

$$\left\| \sum_{k=1}^K a_k P_k(e_\beta) \right\| < \delta.$$

On détermine  $\phi_{n+1}$  ;

puisque  $\sum P_k$  tend simplement vers l'identité de  $H^1$ , on peut trouver un entier  $N > K$  de sorte que pour tout  $i \leq n$

$$\left\| \sum_{k=1}^N P_k(e_{\alpha_i+\beta_{n+1}}) - e_{\alpha_i+\beta_{n+1}} \right\| < \delta.$$

On pose  $\phi_{n+1} = \phi_n + \sum_{k=K}^N P_k$ . Le choix de  $K$  assure que  $\phi_{n+1}$  est de la forme  $\sum a_k P_k$  avec  $a_k \in \{0, 1\}$ .

On vérifie (ii) pour  $i < n+1$

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_i+\beta_{n+1}}) - e_{\alpha_i+\beta_{n+1}}\| &\leq \|\phi_n(e_{\alpha_i+\beta_{n+1}})\| + \left\| \sum_{k=1}^{K-1} P_k(e_{\alpha_i+\beta_{n+1}}) \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{k=1}^N P_k(e_{\alpha_i+\beta_{n+1}}) - e_{\alpha_i+\beta_{n+1}} \right\| \\ &\leq \delta + \delta + \delta \\ &\leq 3\delta. \end{aligned}$$

On vérifie (ii) pour  $i < j \leq n$

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_i+\beta_j}) - e_{\alpha_i+\beta_j}\| &\leq \|\phi_n(e_{\alpha_i+\beta_j}) - e_{\alpha_i+\beta_j}\| + \left\| \sum_{k=K}^N P_k(e_{\alpha_i+\beta_j}) \right\| \\ &\leq \epsilon_n + \delta. \end{aligned}$$

Il reste à fixer  $\alpha_{n+1}$  et vérifier (i).

Puisque  $\phi_{n+1}$  est de rang fini,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \phi_{n+1}(e_\alpha) = 0$  dans  $H^1$ , on peut donc choisir  $\alpha_{n+1}$  de sorte que (ii) soit vérifiée pour  $i = n+1$

$$\forall j \leq n+1 \quad \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_{n+1}+\beta_j})\| \leq \delta.$$

Dans le cas où  $j \leq i \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_i+\beta_j})\| &\leq \|\phi_n(e_{\alpha_i+\beta_j})\| + \left\| \sum_{k=K}^N P_k(e_{\alpha_i+\beta_j}) \right\| \\ &\leq \epsilon_n + \delta. \end{aligned}$$

Finalement, avec  $\epsilon_{n+1} = \max(3\delta, \epsilon_n + \delta)$ , l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour un choix convenable de  $\delta$ , et on peut en outre supposer que  $\epsilon_{n+1} \leq (1 + 2^{-(n+1)})\epsilon_n$ .

En résumé, il est possible de construire des suites avec les propriétés (i) et (ii), avec  $\epsilon_n \leq \epsilon \prod_{k=1}^n (1 + 2^{-k}) < \eta$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit.

On utilise cette construction pour minorer

$$C = \sup_{a_k \in \{0,1\}} \left\| \sum a_k P_k \otimes Id_{S_d^1} \right\|_{H^1(S_d^1) \rightarrow H^1(S_d^1)} \quad (*)$$

En particulier, les  $\|\phi_n \otimes Id_{S_d^1}\|$  avec les  $\phi_n$  construits précédemment sont bornées par  $C$ . Soit  $X = (x_{i,j})$  une matrice de taille  $d$ , l'élément de  $H^1(S_d^1)$  défini par

$$Z = \text{diag}(e_{\alpha_i}) X \text{diag}(e_{\beta_i}),$$

où  $\text{diag}(d_i)$  est la matrice diagonale de taille  $d$  ayant pour entrées les  $d_i$ , vérifie

$$\|Z\|_{H^1(S_d^1)} = \|X\|_{S_d^1}.$$

On note  $T$  la projection triangulaire supérieure dans  $S_d^1$ ; il s'agit de l'application linéaire de  $S_d^1$  dans lui-même qui à une matrice  $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$  associe la matrice

$$T(X) = (x_{i,j} 1_{\{j > i\}}).$$

Les propriétés (i) et (ii) impliquent

$$\left\| \phi_n \otimes Id_{S_d^1}(Z) - Id_{H^1} \otimes T(Z) \right\|_{H^1(S_d^1)} \leq \epsilon_n d^2 \|X\|_{S_d^1}.$$

D'autre part,  $Id_{H^1} \otimes T(Z) = \text{diag}(e_{\alpha_i})T(X)\text{diag}(e_{\beta_i})$  et donc  $\|Id_{H^1} \otimes T(Z)\|_{H^1(S_d^1)} = \|T(X)\|_{S_d^1}$ , d'où

$$\|T(X)\|_{S_d^1} \leq \epsilon_n d^2 \|X\|_{S_d^1} + C \|X\|_{S_d^1}.$$

$\epsilon_n$  pouvant être arbitrairement petit, on en déduit que  $C$  domine la norme de la projection triangulaire dans  $S_d^1$  qui est de l'ordre de  $\ln d$  d'après [3], ce qui termine la preuve.

**Corollaire**  $H^1$  n'admet pas de base complètement inconditionnelle.

Si tel était le cas, les projections sur les vecteurs de base formeraient une décomposition complètement inconditionnelle de l'identité.

Il découle de [6] ou de [7] que l'estimation en  $\ln d$  pour la constante (\*) est optimale et atteinte pour la décomposition de Stein.

## Références

- [1] Effros E. et Ruan Z.J. *Operator spaces*. Oxford Univ. Press. À paraître.
- [2] Garnett, J. *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.
- [3] Kwapien, S. et Pełczyński A. The main triangle projection in matrix spaces and its applications. *Studia Math.* 34 (1970) 43-68.
- [4] Maurey, B. Isomorphismes entre espace  $H^1$ , *Acta math.* 145 (1980) p 79-120.
- [5] Meyer Y. *Ondelettes* Hermann 1990.
- [6] Nazarov F., Pisier G., Treil S., Volberg A. Sharp estimates in vector Carleson imbedding theorem and for vector paraproducts. À paraître.
- [7] Petermichl S. Dyadic shift and a logarithmic estimate for Hankel operator with matrix symbol, *C. R. Acad. Sci. Paris* 2000, À paraître.
- [8] Pisier, G. *Non-commutative vector valued  $L_p$ -spaces and completely  $p$ -summing maps*, Astérisque 247 (1998).
- [9] Stein, E. Multiplicateurs et fonctions de Littlewood-Paley, *C. R. Acad. Sci. Paris Série A-B*, 263 (1966) A 716-719.
- [10] Wojtaszczyk, P. The Franklin system is an unconditional basis in  $H^1$ , *Arkiv för Mat.*, 20 (1982), 293-300.

Éric Ricard  
 Université Paris VI  
 Équipe d'analyse  
 4 place Jussieu  
 75252 Paris Cedex 05  
 France